Apellido y nombres: ....
Padrón: .... Correo electrónico: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Primera fecha. 30 de junio de 2015.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Sea g holomorfa en $\mathbb{C}$ y con un cero de orden 1 en $z=a$. Sea f holomorfa en $\mathbb{C}-\{0\}$ cuya única singularidad $z=0$ es polo de orden 1 y $\mathrm{Res}[f,0]=\alpha$.
Para $h=f\circ g$, probar: (i) h es holomorfa en $\mathbb{C}-\{a\}$; (ii) h tiene un polo de orden 1 en a y (iii) $\mathrm{Res}[h,a]=\dfrac{\alpha}{g'(a)}$.

(b) Hallar una función armónica en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<y\}$ que además verifique $u(x,x)=1$ si $x>0$ y $u(x,-x)=0$ si $x<0$.

Ejercicio 2. Para $0<a\leqslant 2$, sea $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x\leqslant a \\ -1 & -a\leqslant x<0 \\ 0 & |x|>a \end{cases}$

(a) Desarrollar en serie trigonométrica de Fourier de $f(x)$ en $[-2,2]$ y analizar convergencia puntual y uniforme.

(b) Resolver:

$$\begin{array}{ll} 4\,u_{xx}-u_t=0 & 0<x<2,\ t>0 \\ u(0,t)=u(2,t)=0 & t\geqslant 0 \\ u(x,0)=f(x) & 0\leqslant x\leqslant 2 \end{array}$$

Ejercicio 3. Sea $f(t)=e^{-t}H(t)$ para $H(t)$ la función de Heaviside.

(a) Verificar que se cumplen las hipótesis necesarias para la existencia de la transformada y de la antitransformada de Fourier de f.

(b) Calcular $\mathcal{F}[f](w)$ y $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\cos wt + w\,\mathrm{sen}wt)}{1+w^2}\,dw \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Dada $f(x)=\begin{cases} 2\,x\,e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$

(a) Resolver:

$$y'(x)-4\,e^x\int_0^x e^{-t}\,y(t)\,dt-y(x)=f(x);\quad y(0)=0$$

(b) Hallar la transformada de Laplace de:

(i) $g_1(x)=\begin{cases} 2\,x\,e^{-x} & \text{si } x\geqslant 4 \\ 0 & \text{si } x<4 \end{cases}$ (ii) $g_2(x)=\begin{cases} 2\,(x-4)\,e^{(-x+4)} & \text{si } x\geqslant 4 \\ 0 & \text{si } x<4 \end{cases}$

a partir de la transformada de Laplace de f. Enunciar y demostrar las propiedades utilizadas.